Série N° 1

Algèbre Vectorielle

Exercice 1

Soient les vecteurs $\vec{V_1} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{V_2} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

1. Calculer le module (la norme) de $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_1} + \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} - \vec{V_2}$.
2. Calculer : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$.
3. Trouver l'angle entre les deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.
4. Calculer le vecteur unitaire $\vec{u_1}$ de même sens et direction que $\vec{V_1}$.
5. Calculer le vecteur unitaire $\vec{u_2}$ perpendiculaire aux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ tels que :

$$\vec{V_1} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k},$$
$$\vec{V_2} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$
$$\vec{V_3} = x\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}.$$

- Calculer x et z pour que le vecteur $\vec{V_3}$ soit :
  a. Parallèle à $\vec{V_1}$.
  b. Parallèle à $\vec{V_2}$.
  c. Perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ au même temps.

Exercice 3

Soient $F(x, y, z) = 3x^3 - 2xy^2 + y^2z + 5xyz^2$ une fonction dans l'espace cartésien et le champ de vecteurs $\vec{C}(x, y, z) = 2(y^3 + z^2)\vec{i} + (x + 5y)\vec{j} + (3x + y^2 - 2z)\vec{k}$.

- Calculer $\overrightarrow{grad}\, F$, $Div\, \vec{C}$ et $\overrightarrow{rot}\, \vec{C}$.

Example 1

Two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are given by: $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

1. Find $\vec{A} \wedge \vec{B}$.
2. Find the area of the parallelogram formed by $\vec{A}$ and $\vec{B}$
3. Determine a unit vector $\vec{u_1}$ with the same direction as $\vec{A}$.
4. Determine a unit vector $\vec{u_2}$ perpendicular to the vector $\vec{B}$.

Analyse Dimensionnelle

Exercice 1

Calculer la dimension des grandeurs physiques suivantes :

La vitesse V, la force F, la pression P, la densité volumique ρ.

Exercice 2

Vérifier si les équations suivantes sont homogènes en dimensions. Sachant que v est la vitesse, a est l'accélération, t est le temps (s) et x est la position.

1. $x = t^2/(2a)$.
2. $x = 0{,}5\ a^2 vt$.
3. $x = 0{,}5\ at^2$.
4. $x = v^2/(2a)$.

Exercice 3

Dans un gaz, une particule de masse m animée d'une vitesse v, enfermée dans une boite cubique d'arrête a, a une énergie cinétique E_c, telle que : $E_c = \frac{h^2}{32\pi^2 m a^2} n^2$, où n représente un nombre entier sans dimension.

- En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de h.

Exercice 4 : Période d'un pendule

Un pendule simple constitué d'une masse m est accrochée à l'extrémité mobile d'un fil de longueur l. On travaille dans le référentiel terrestre ou le champ de pesanteur est $\vec{g}$.

- Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule s'écrit : $T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$ où K est une constante sans dimension.

Example 2

The time period τ of oscillation of a simple pendulum depends on the following quantities:
Length of the pendulum l, mass of the bob m, and acceleration due to gravity g.

- Derive an expression for τ using dimensional method.

Exercice 5

Soit un gaz enfermé dans un récipient, la pression P qu'exerce ce gaz est due aux chocs des molécules sur la paroi du récipient. P dépend 'à priori' de la densité n du gaz (n est le nombre de molécules$/m^3$), de la masse m de chaque molécule et de la vitesse moyenne $\bar{v}$ des molécules.

- En utilisant l'analyse dimensionnelle trouver la formule de la pression P.

Exercice 6 : Vibration d'une goutte d'eau

La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres.

Les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f seront : le rayon de la goutte R, la masse volumique ρ, et la force due à la tension superficielle A (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur).

On écrira donc : $f = k_1 R^a \rho^b A^c$, où k_1 est une constante sans dimension ; a, b et c sont les exposants respectifs de R, ρ et A.

- En déduire les valeurs de a, b et c.

Calcul d'Incertitudes

Exercice 1

Une masse m est lâchée d'une hauteur h. À son arrivée au sol, sa vitesse est $v = \sqrt{2gh}$. $h = 53{,}6\,m$ est mesurée avec une incertitude absolue de $1\,cm$ et l'accélération de la pesanteur g, qui vaut $9{,}81\,m/s^2$, est connue avec une incertitude relative de 0,1%.

- Estimer l'incertitude sur la valeur calculée de v.

Exercice 2

On cherche à mesurer l'accélération de la pesanteur g à l'aide d'un pendule, en utilisant la relation :

$T = K\sqrt{\frac{L}{g}}$, où T est la période d'oscillation et L la longueur du pendule.

On mesure $L = 15\,cm$ à 2% près et $T = 0{,}8\,s$ à 3% près. On en déduit $4\pi^2 \frac{L}{T^2} = 9{,}253\,m/s^2$. On veut connaître l'incertitude relative sur g, c'est-à-dire $\frac{\Delta g}{g}$.

Exercice 3

Les résultats expérimentaux de deux grandeurs A et B donnent :

$A = 263{,}4 \mp 0{,}2$ et $B = 154{,}3 \mp 0{,}5$.

- Calculer les incertitudes sur :
  $D = A + B$; $C = A - B$; $E = A/B$; $F = 2AB$; $G = 5\,A^2/B^3$.

Exercice 4 : Période d'un pendule

Un fil en cuivre de diamètre $d = (0{,}80 \mp 0{,}01)\,mm$ et de longueur $L = (3\,m \mp 5\,mm)$. Si la résistivité du cuivre $\rho_\Omega = (1{,}57 \mp 0{,}01)\cdot 10^{-8}\,\Omega m$.

- Trouver la résistance R du fil ? (Loi d'ohm $R = \rho_\Omega L/S$, S est la section du fil).